問題

$N$ を 1 以上の整数とする。数字 $1,2,3,\cdots,N$ が書かれたカードを 1 枚ずつ，計 $N$ 枚用意し，甲，乙の 2 人が次の手順でゲームを行う。

(ⅰ) 甲が 1 枚のカードを引く，そのカードに書かれた数を $a$ とする。
引いたカードはもとに戻す。

(ⅱ) 甲はもう 1 回カードを引くかどうかを選択する。
引いた場合は，そのカードに書かれた数を $b$ とする。
引かなかった場合は，$b=0$ とする。
$a+b>N$ の場合は乙の勝ちとし，ゲームを終了する。

(ⅲ) $a+b\leq N$ の場合は，乙が 1 枚カードを引く。
そのカードに書かれた数を $c$ とする。引いたカードはもとに戻す。
$a+b<c$ の場合は乙の勝ちとし，ゲームは終了する。

(ⅳ) $a+b\geq c$ の場合は，乙はもう 1 回カードを引く。
そのカードに書かれた数を $d$ とする。
$a+b<c+d\leq N$ の場合は乙の勝ちとし，それ以外の場合は甲の勝ちとする。

以下の問いに答えよ。

(1) 甲が 2 回目にカードを引かないことにしたとき，甲の勝つ確率を $a$ を用いて表せ。

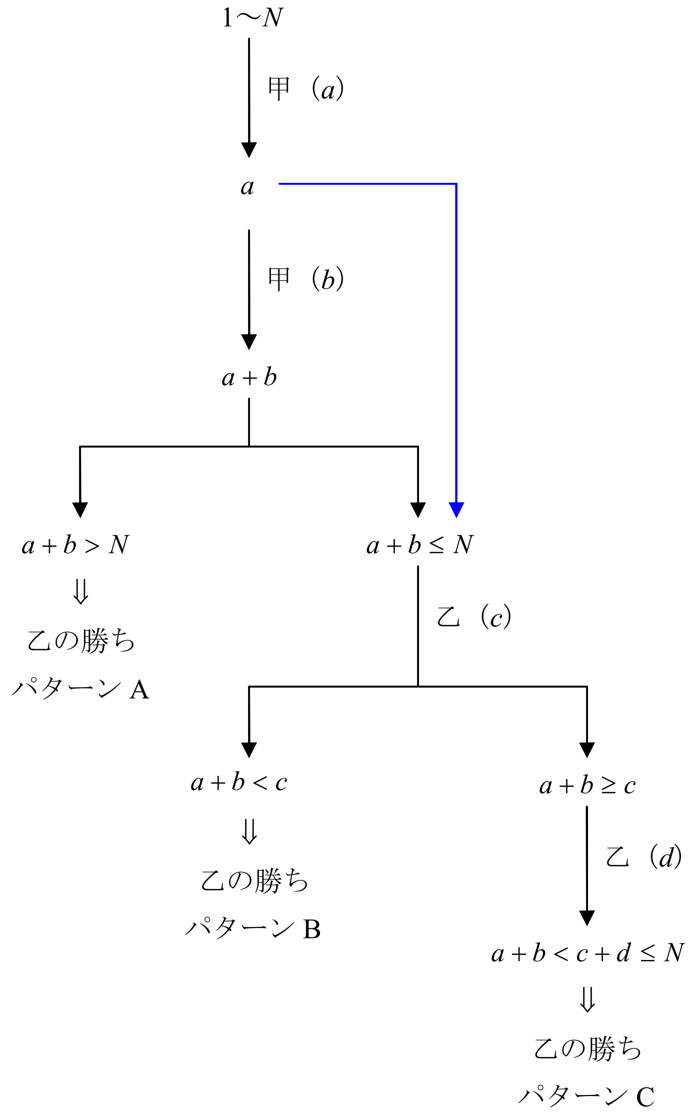
(2) 甲が 2 回目にカードを引くことにしたとき，甲の勝つ確率を $a$ を用いて表せ。

ただし，各カードが引かれる確率は等しいものとする。

（2005　東京大学）

解答と解説

まず，手順を整理すると次のようになる。



**(1)**

甲が勝つためには，パターン C で乙の勝ちを否定するしかない。

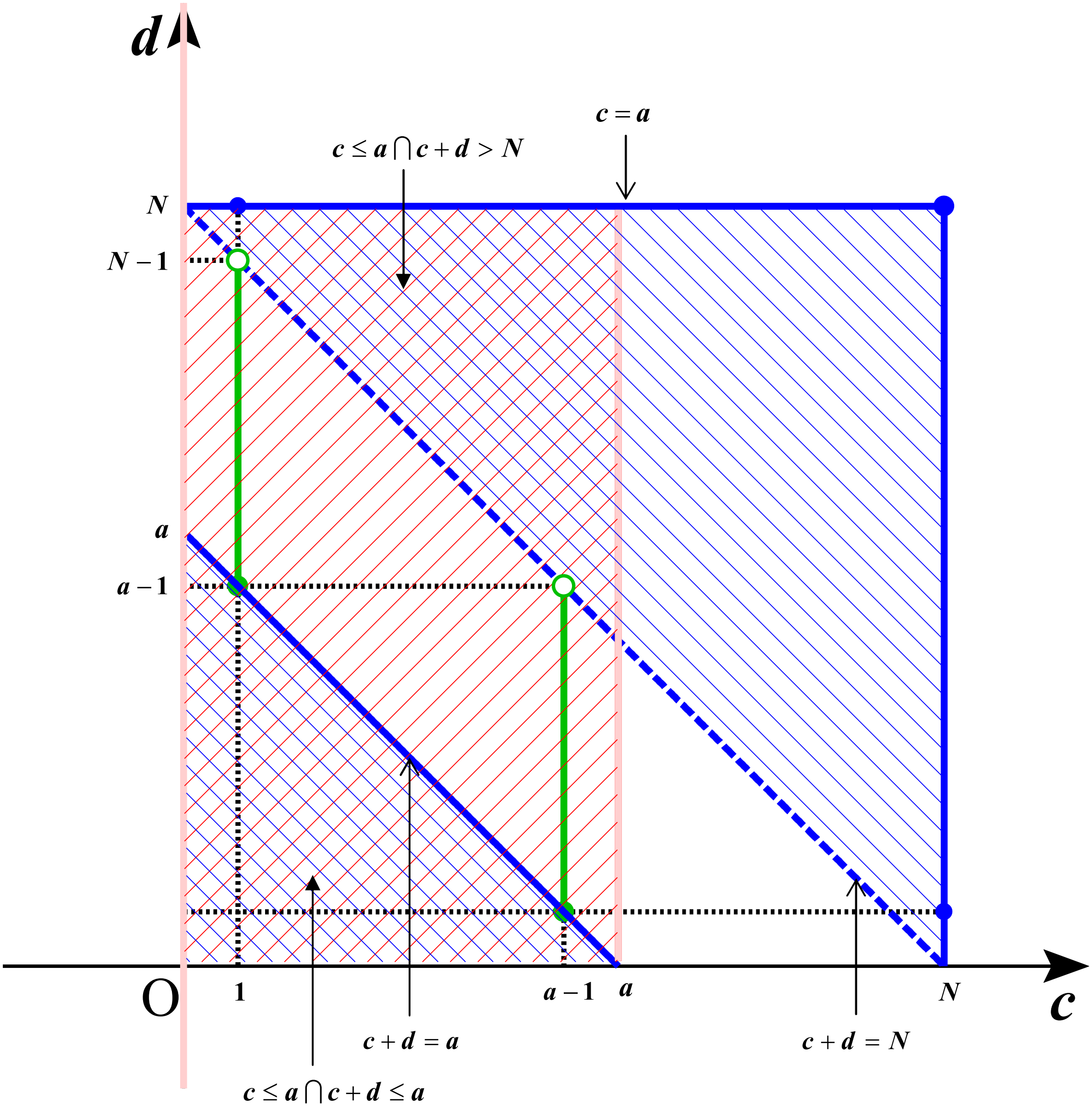
よって，

$$
\begin{aligned}
a \ge c \cap \overline{a < c+d \le N} &\Leftrightarrow a \ge c \cap \overline{a < c+d \cap c+d \le N} \\
&\Leftrightarrow a \ge c \cap \left(\overline{a < c+d} \cup \overline{c+d \le N}\right) \\
&\Leftrightarrow a \ge c \cap \left(a \ge c+d \cup c+d > N\right) \\
&\Leftrightarrow \left(c \le a \cap c+d \le a\right) \cup \left(c \le a \cap c+d > N\right)
\end{aligned}
$$

$a,b,c,d$ は整数だから，横軸を $c$，縦軸を $d$ とする座標系をとり，

これを図にすると，甲が勝つのは赤色斜線部と青色斜線部が重なり合う領域である。

したがって，格子点の数から甲が勝つ確率を求めることができる。



$(c,d)$ の組合せの総数

$1 \leq c \leq N$，$1 \leq d \leq N$ より，$(c,d)$ の組合せの総数$=N^2$　・・・①

（図の$1 \leq c \leq N, 1 \leq d \leq N$ を満たす領域の格子点の総数に当たる）

$(c \leq a \cap c+d \leq a) \cup (c \leq a \cap c+d > N)$ を満たす $(c,d)$ の組合せの数

図の$1 \leq c \leq a$，$1 \leq d \leq N$ を満たす領域の格子点の数から，

赤色斜線部のみの領域の格子点の数を引けばよい。

$\therefore aN - \{(N-2)-(a-1)+1\}a = aN - a(N-a) = a^2$　・・・②

よって，求める確率は$\dfrac{a^2}{N^2}$　・・・(答)

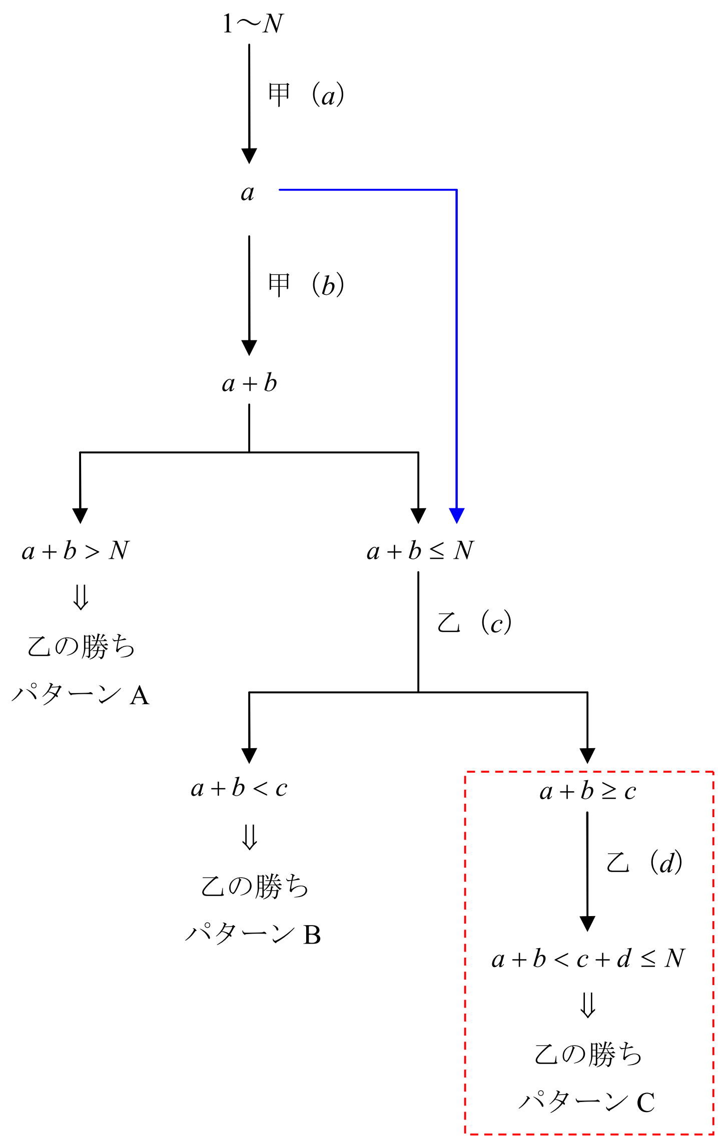
**(2)**

(1)と同様　甲が勝つためには，パターン C で乙の勝ちを否定するしかない。

(1)では，$a \geq c \cap \overline{a < c + d \leq N}$ である確率が $\dfrac{a^2}{N^2}$ となった。

これは，赤色枠において，$b = 0$ とした場合の甲が勝つ確率とみなすことができる。

よって，赤色枠において甲が勝つ確率を一般化すると，$\dfrac{(a+b)^2}{N^2}$ である。



(2)では必要条件 $a+b \leq N$ も考慮することになる。
まず $a+b \leq N$ かつ $1 \leq b \leq N$ より，甲が引くべきカードは $1 \leq b \leq N-a$ のいずれかである。
たとえば，それが $b=3$ $(1 \leq 3 \leq N-a)$ であったとし，

この条件のもとで甲が勝つ確率は $\dfrac{(a+3)^2}{N^2}$ となる。

よって，甲が $b=3$ $(1 \leq 3 \leq N-a)$ を引き且つ甲が勝つ確率は,

甲が $b=3$ を引く確率= $\dfrac{1}{N}$ より， $\dfrac{1}{N} \cdot \dfrac{(a+1)^2}{N^2}$

これを一般化すると，甲が $b=k$ $(1 \leq k \leq N-a)$ を引き且つ甲が勝つ確率は $\dfrac{1}{N} \cdot \dfrac{(a+k)^2}{N^2}$

これより，求める確率は,

$$\frac{1}{N} \cdot \frac{(a+1)^2}{N^2} + \frac{1}{N} \cdot \frac{(a+2)^2}{N^2} + \cdots + \frac{1}{N} \cdot \frac{(a+k)^2}{N^2} + \ldots + \frac{1}{N} \cdot \frac{\{a+(N-a)\}^2}{N^2}$$

$$= \frac{1}{N^3}\left\{(a+1)^2 + (a+2)^2 + \cdots + (a+k)^2 + \cdots + N^2\right\}$$

$$= \frac{1}{N^3} \sum_{m=a+1}^{N} m^2$$

$$= \frac{1}{N^3}\left(\sum_{m=1}^{N} m^2 - \sum_{m=1}^{a} m^2\right)$$

$$= \frac{1}{N^3}\left\{\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{a(a+1)(2a+1)}{6}\right\}$$

$$= \frac{N(N+1)(2N+1) - a(a+1)(2a+1)}{6N^3} \quad ・・・(答)$$